

Penyelesaian Persamaan Differensial dengan Menggunakan Polinomial Lagrange Seri I (1 Dimensi)

Syawaluddin H¹⁾

Abstrak

Pada paper ini disajikan penggunaan polinomial Lagrange untuk menyelesaikan suatu persamaan differensial secara numeris. Pada metoda ini suatu fungsi pada persamaan differensial didekati dengan polinomial Lagrange, selanjutnya differensial dari fungsi didekati dengan differensial dari polinomial Lagrange. Dengan metoda ini dihasilkan koefisien turunan yang sama dengan metoda selisih hingga. Metoda ini juga mirip dengan metoda elemen hingga dalam hal ukuran grid, yaitu dapat digunakan ukuran grid yang tidak seragam. Kemiripan lain dengan metoda elemen hingga adalah bahwa shape function dari metoda elemen hingga untuk elemen garis dan segiempat adalah berasal dari polinomial Lagrange.

Metoda yang dikembangkan digunakan untuk menyelesaikan persamaan gelombang Airy dan memberikan hasil yang baik.

Kata-kata kunci : *Polinomial Lagrange.*

Abstract

This paper presents a numerical method for solving a differential equation by using Lagrangian Polynomial. In this method function in a differential equation is approximated with Lagrange Polynomial and then the differential of the function is approximated with differential of Lagrange Polynomial. This method results in the same coefficient derivatives with the finite difference method. The results show that the differential coefficients' is the same with finite difference method. Compare with finite element method, the method is alike it uses the same shape function and because it can be used with variably grid size.

The method was used to solve Airy wave's equation and give a good result.

Keywords : *Lagrange Polynomial.*

1. Latar Belakang

Harga suatu fungsi dapat didekati dengan polinomial Lagrange, sehingga differensial dari fungsi dapat dinyatakan dengan differensial dari polinomial Lagrange tersebut. Sesuai dengan namanya, polinomial Lagrange adalah berbentuk polinomial, dimana turunannya dapat dihitung dengan mudah. Dengan demikian, bila fungsi pada persamaan differensial didekati dengan polinomial Lagrange, maka differensial fungsi dapat digantikan dengan differensial dari polinomial Lagrange. Selanjutnya dengan memasukan harga syarat batas, diperoleh harga fungsi pada titik-titik polinomial.

Dengan polinomial Lagrange ini dihasilkan suatu metoda yang serupa dengan metoda selisih hingga, dengan kelebihan perhitungan dengan ukuran grid yang tidak seragam dapat dilakukan tanpa memerlukan

formulasi khusus. Dengan metoda ini perhitungan pada domain yang memerlukan ukuran grid yang tidak seragam dapat dilakukan dengan mudah. Sehingga metoda ini juga mirip dengan metoda elemen hingga. Metoda elemen hingga untuk elemen garis dan elemen segiempat menggunakan shape function yang dapat diturunkan dengan menggunakan polinomial Lagrange [Stasa L. Frank, 1986], [Zienkiewicz, O.C., Morgan, K]. Perbedaannya adalah bahwa pada metoda elemen hingga terdapat proses minimalisasi kesalahan baik dengan menggunakan weighted residual method maupun variational principle.

Kemudahan lain yang diberikan pada metoda polinomial Lagrange ini adalah bahwa, sebagaimana halnya pada metoda selisih hingga, pada pengerjaan dengan skema eksplisit tidak memerlukan operasi matrix.

1. Staf Pengajar PST Kelautan-ITB

Catatan : Usulan makalah dikirimkan pada 29 Nopember 2005 dan dinilai oleh peer reviewer pada tanggal 30 Desember 2005 - 7 April 2006. Revisi penulisan dilakukan antara tanggal 7 April 2006 hingga 8 Mei 2006.

2. Polinomial Lagrange

Berdasarkan [Anderson John D. JR], suatu fungsi $f(x)$ dapat didekati dengan polinomial Lagrange, yaitu :

$$f(x) = \sum_{i=1}^n L_i(x) f_i \quad (2.1)$$

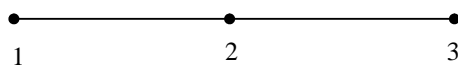
Dimana:

$L_i(x)$ = polinomial Lagrange untuk titik ke i

$$L_i(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_j) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_1)(x_i - x_2)(x_i - x_3)(x_i - x_j) \dots (x_i - x_n)}$$

dimana $i = 1, 2, 3 \dots n, j = 1, 2, 3 \dots n, j \neq i$

Untuk suatu domain yang dibagi atas 3 titik, seperti pada **Gambar 2.1.**, maka:



Gambar 2.1. Ilustrasi polinomial lagrange

$$L_1 = \frac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} \quad (2.3a)$$

$$L_2 = \frac{(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} \quad (2.3b)$$

$$L_3 = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} \quad (2.3c)$$

Selanjutnya $f(x)$ pada domain tersebut dapat didekati dengan polinomial Lagrange, yaitu :

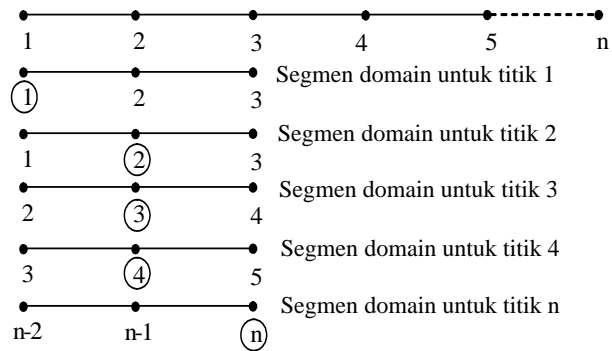
$$f(x) = \sum_{i=1}^n L_i(x) f_i$$

$$f(x) = L_1(x) f_1 + L_2(x) f_2 + L_3(x) f_3 \quad (2.4)$$

Harga-harga fungsi pada $x_1 \leq x \leq x_3$, dapat dihitung dengan **Persamaan (2.4)** dengan diketahuinya f_1, f_2 dan f_3 . Demikian juga dengan harga-harga turunan df/dx pada $x_1 \leq x \leq x_3$ termasuk pada $x = x_1, x_2$ dan x_3 dapat dihitung dengan menggunakan **Persamaan (2.3)**, yaitu :

$$\frac{df}{dx} = \frac{dL_1}{dx} f_1 + \frac{dL_2}{dx} f_2 + \frac{dL_3}{dx} f_3 \quad (2.5)$$

Pemakaian polinomial Lagrange untuk menyelesaikan persamaan differensial ini tidak berarti bahwa **Persamaan (2.1)** dikerjakan pada seluruh domain sekaligus, walaupun hal ini memungkinkan, tetapi dikerjakan persegmen garis atau sub domain. Untuk domain seperti pada **Gambar (2.2)**, maka pengerjaan polinomial Lagrange misal dengan 3 titik polinomial



Gambar 2.2. Segmentasi pada pengerjaan polinomial Lagrange

adalah sebagai berikut

Terlihat pada **Gambar (2.2)** bahwa turunan titik 1 akan dinyatakan oleh harga fungsi pada titik 1, 2 dan 3, hal ini serupa dengan metoda selisih hingga pada skema forward-difference, sedangkan pada titik-titik 2, 3 $n-1$ akan serupa dengan central-difference, sedangkan pada titik ke n akan serupa dengan backward-difference. Keuntungan lain dari penggunaan polinomial Lagrange adalah bahwa segmen domain dapat dengan mudah diperluas, misal segmen domain dengan 4, 5, 6 dan 7 titik polinomial. Penggunaan segmen dengan 2 titik adalah menjadi pendekatan linier, dengan 3 titik adalah pendekatan kuadratis dan seterusnya.

3. Koefisien Differensial

Yang dimaksud dengan koefisien differensial adalah harga dL_i/dx pada **Persamaan (2.5)**. Koefisien ini dapat langsung dihitung dengan menggunakan definisi dari polinomial Lagrange seperti pada **Persamaan (2.2)**. Tetapi hal ini tentunya kurang praktis bila setiap saat harus menghitung koefisien turunan. Untuk mengatasi hal tersebut, maka dilakukan transformasi koordinat, dari sistim koordinat x , ke sistim koordinat kurvilinear ξ , dengan domain $-1 \leq \xi \leq 1$.

Transformasi koordinat pada suatu segmen domain dilakukan dengan

$$x = \sum_{i=1}^n L_i(\xi) x_i \quad \text{menggunakan Persamaan (5).} \quad (3.1)$$

n = jumlah titik pada segmen domain

$L_i(\xi)$ polinomial Lagrange dalam sistim koordinat ξ , mempunyai bentuk yang sama seperti pada **Persamaan (2.2)** dimana x diganti dengan ξ .

Sedangkan f pada suatu segmen domain juga dilakukan pendekatan yang sama yaitu :

$$f(\xi) = \sum_{i=1}^n L_i(\xi) f_i \quad (3.2)$$

$$\frac{df}{d\xi} = \frac{df}{dx} \frac{dx}{d\xi} \quad \text{Korelasi antara turunan pada domain } x \text{ dengan pada domain } \xi \text{ adalah sebagai berikut :} \quad (3.3)$$

$dx/d\xi$ dikenal dengan matrix Jacobian, dalam hal ini

$$\frac{dx}{d\xi} = \sum_{i=1}^n \frac{dL_i}{d\xi} x_i \quad \text{ukuran matrixnya adalah } (1 \times 1). \text{ Matrix Jacobian ini dapat dihitung dengan menggunakan} \quad (3.4)$$

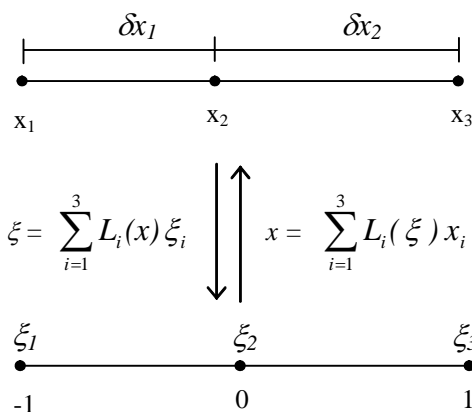
Persamaan (3.1), yaitu :

Transformasi koordinat pada **Persamaan (3.1)**, memungkinkan bahwa, walaupun pada domain x digunakan ukuran grid yang tidak seragam, dapat ditransformasikan ke domain ξ dengan ukuran grid yang seragam, seperti terlihat pada **Gambar (3.1)**

Pada grid dengan ukuran seragam ini (pada sistim koordinat ξ), dapat dihitung koefisien turunan yang berharga tetap yang hanya tergantung pada jumlah titik polinomial pada segmen domain.

$$\begin{aligned} L_1(\xi) &= \frac{(\xi - \xi_2)(\xi - \xi_3)}{(\xi_1 - \xi_2)(\xi_1 - \xi_3)} \\ L_2(\xi) &= \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_3)}{(\xi_2 - \xi_1)(\xi_2 - \xi_3)} \\ L_3(\xi) &= \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2)}{(\xi_3 - \xi_1)(\xi_3 - \xi_2)} \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{a. Koefisien turunan untuk segmen domain dengan 3 titik polinomial} \\ \text{Dengan 3 titik polinomial, polinomial Lagrange pada sistim} \end{array}$$

koordinat ξ adalah



Gambar 3.1. Transformasi dari ξ ke x

$$\begin{aligned} \frac{df}{d\xi} &= \frac{dL_1}{d\xi} f_1 + \frac{dL_2}{d\xi} f_2 + \frac{dL_3}{d\xi} f_3 \\ \frac{df}{d\xi} &= -\frac{1}{2} (2\xi - 1) f_1 + \frac{1}{2} (-2\xi) f_2 + \frac{1}{2} (2\xi + 1) f_3 \end{aligned}$$

Pada titik 1, $\xi = -1$

$$\frac{dL_1}{d\xi} = -\frac{1}{2} (2\xi - 1) = \frac{3}{2}, \quad \frac{dL_2}{d\xi} = 2, \quad \frac{dL_3}{d\xi} = -\frac{1}{2}$$

Pada titik 2, $\xi = 0$ dimana $\xi_1 = -1$, $\xi_2 = 0$ dan $\xi_3 = 1$

$$\frac{dL_1}{d\xi} = -\frac{1}{2}, \quad \frac{dL_2}{d\xi} = 0, \quad \frac{dL_3}{d\xi} = \frac{1}{2} + \frac{L_1(\xi)}{L_1(\xi)} f_1$$

Pada titik 3, $\xi = 1$

$$\frac{dL_1}{d\xi} = -\frac{1}{2}, \quad \frac{dL_2}{d\xi} = -2, \quad \frac{dL_3}{d\xi} = \frac{3}{2}$$

$$[C] = \begin{bmatrix} -1.500 & 2.000 & -0.500 \\ -0.500 & 0.000 & 0.500 \\ 0.500 & -2.000 & 1.500 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Pada titik 1

$$\frac{df}{dx} = \frac{1}{J_1} (C_{11} f_1 + C_{12} f_2 + C_{13} f_3) \quad \text{Jadi} \quad (3.6a)$$

koefisien turunan adalah

$$J_1 = C_{11} x_1 + C_{12} x_2 + C_{13} x_3 \quad (3.6b)$$

Pada titik 1 : $C_{11} = 3/2$; $C_{12} = 2$; $C_{13} = -$

Pada titik 2 $1/2$

$$\frac{df}{dx} = \frac{1}{J_2} (C_{21} f_1 + C_{22} f_2 + C_{23} f_3) \quad \text{Pada titik 2 :} \quad (3.6c)$$

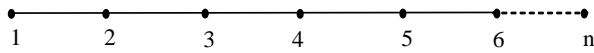
$$J_2 = C_{21} x_1 + C_{22} x_2 + C_{23} x_3 \quad \begin{array}{l} C_{21} = - \\ 1/2 ; C_{22} = \\ 0 ; C_{23} = 1/2 \end{array} \quad (3.6d)$$

Pada titik 3 Pada titik 3 : $C_{31} = -1/2$; $C_{32} = -$

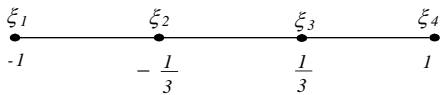
$$\frac{df}{dx} = \frac{1}{J_3} (C_{31} f_1 + C_{32} f_2 + C_{33} f_3) \quad \begin{array}{l} 2 ; \\ C_{33} = \end{array} \quad (3.6e)$$

$$J_3 = C_{31} x_1 + C_{32} x_2 + C_{33} x_3 \quad \begin{array}{l} 1/2 \\ \end{array} \quad (3.6f)$$

Atau ditulis dalam bentuk matrix



[C] selanjutnya disebut dengan matrix koefisien turunan. Dengan menggunakan [C] dapat dihitung harga turunan, yaitu :



$$L_1 = \frac{(\xi - \xi_2)(\xi - \xi_3)(\xi - \xi_4)}{(\xi_1 - \xi_2)(\xi_1 - \xi_3)(\xi_1 - \xi_4)}$$

$$L_2 = \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_3)(\xi - \xi_4)}{(\xi_2 - \xi_1)(\xi_2 - \xi_3)(\xi_2 - \xi_4)}$$

$$L_3 = \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2)(\xi - \xi_4)}{(\xi_3 - \xi_1)(\xi_3 - \xi_2)(\xi_3 - \xi_4)}$$

$$L_4 = \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2)(\xi - \xi_3)}{(\xi_4 - \xi_1)(\xi_4 - \xi_2)(\xi_4 - \xi_3)}$$

metoda ini pada domain yang terdiri atas n titik, adalah

$$[C] = \begin{bmatrix} -2.750 & 4.500 & -2.250 & 0.500 \\ -0.500 & 0.750 & 1.500 & -0.250 \\ 0.250 & -1.500 & 0.750 & 0.500 \\ -0.500 & 2.250 & -4.500 & 2.750 \end{bmatrix} \quad \text{pada titik 1, digunakan Persamaan (3.6a) dan (3.6b)} \quad (3.7)$$

pada titik 2 s/d (n-1), digunakan Persamaan (3.6c) dan (3.6d)

pada titik n, digunakan Persamaan (3.6e) dan (3.6f)

b. Koefisien turunan untuk segmen domain dengan 4, 5 dan 7 titik polinomial

Titik-titik koordinat pada segmen domain adalah

$$[C] = \begin{bmatrix} -4.167 & 8.000 & -6.000 & 2.667 & -0.500 \\ -0.500 & 1.667 & 3.000 & -1.000 & 0.167 \\ 0.167 & -1.333 & 0.000 & 1.333 & -0.167 \\ -0.167 & 1.000 & -3.000 & 1.667 & 0.500 \\ 0.500 & -2.667 & 6.000 & -8.000 & 4.167 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Polinomial Lagrangennya adalah

$$[C] = \begin{bmatrix} -7.350 & 18.000 & -22.500 & 20.000 & -11.250 & 3.600 & -0.500 \\ -0.500 & 3.850 & 7.500 & -5.000 & 2.500 & -0.750 & 0.100 \\ 0.100 & -1.200 & -1.750 & 4.000 & -1.500 & 0.400 & -0.050 \\ -0.050 & 0.450 & -2.250 & 0.000 & 2.250 & -0.450 & 0.050 \\ 0.050 & -4.000 & 1.500 & -4.000 & 1.750 & 1.200 & -1.000 \\ -1.000 & 0.750 & -2.500 & 5.000 & -7.500 & -0.450 & 0.500 \\ 0.500 & -3.600 & 11.250 & -20.000 & 22.500 & -18.000 & 7.350 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

$$\frac{df}{d\xi} = \frac{df}{dx} \frac{dx}{d\xi}$$

$$\frac{d}{d\xi} \left(\frac{df}{d\xi} \right) = \frac{d}{d\xi} \left(\frac{df}{dx} \frac{dx}{d\xi} \right)$$

$$\frac{d^2 f}{d\xi^2} = \frac{d}{d\xi} \left(\frac{df}{dx} \right) \frac{dx}{d\xi} + \frac{df}{dx} \frac{d}{d\xi} \left(\frac{dx}{d\xi} \right)$$

$$\frac{d^2 f}{d\xi^2} = \left(\frac{d^2 f}{dx^2} \frac{dx}{d\xi} \right) \frac{dx}{d\xi} + \frac{df}{dx} \frac{d^2 x}{d\xi^2}$$

$$\frac{d^2 f}{d\xi^2} = \frac{d^2 f}{dx^2} \left(\frac{dx}{d\xi} \right)^2 + \frac{1}{dx/d\xi} \frac{df}{dx} \frac{d^2 x}{d\xi^2}$$

$$\frac{d^2 f}{d\xi^2} = \frac{1}{(dx/d\xi)^2} \left(\frac{d^2 x}{d\xi^2} - \frac{df}{dx} \frac{d^2 x}{d\xi^2} \right) \quad \text{yaitu :} \quad (3.10)$$

Dengan cara yang sama dapat dihitung matrix koefisien turunan untuk 5, 6, 7

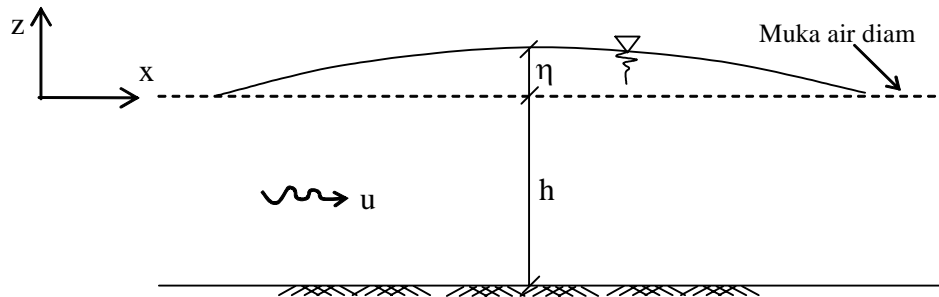
..... n titik polinomial, dimana perhitungannya dapat dengan mudah dibuat program komputernya. Koefisien turunan untuk segmen domain dengan 5 dan 7 titik polinomial adalah sebagai berikut.

Koefisien turunan pada segmen domain dengan 5 titik polinomial

Koefisien turunan pada segmen domain dengan 7 titik polinomial

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial (uH)}{\partial x} = 0 \quad \text{Perhitungan turunan ke dua, dapat dilakukan dengan cara sebagai berikut} \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \quad (4.2)$$



Gambar 4.1. Sket variabel pada persamaan gelombang Airy

4. Contoh Pemakaian

Sebagai contoh akan diselesaikan persamaan gelombang Airy satu dimensi, dimana persamaan terdiri atas dua persamaan differensial, yaitu :

a. Persamaan Kontinuitas

b. Persamaan momentum

dimana :

Pada titik $i = 1$ η_{air} = fluktuasi muka air

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{J_1} (C_{11} u_1 + C_{12} u_2 + C_{13} u_3) \quad u$$

$$J_1 = C_{11} x_1 + C_{12} x_2 + C_{13} x_3 \quad =$$

kecepatan rata-rata kedalaman

h = kedalaman perairan pada muka air diam

$H = h + \eta$ = kedalaman total

Pada titik $i = 2$ s/d $(n - 1)$ a. Penyelesaian differensial ruang $\partial/\partial x$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (C_{21} u_{i-1} + C_{22} u_i + C_{23} u_{i+1}) \quad \text{S e -}$$

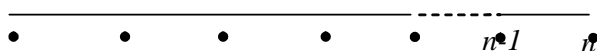
$$\frac{\partial (uH)}{\partial x} = \frac{1}{J_2} (C_{21} (uH)_{i-1} + C_{22} (uH)_i + C_{23} (uH)_{i+1})$$

bagaimana halnya dengan metoda selisih hingga, maka daerah perhitun-

$$\frac{\partial (uH)}{\partial x} = \frac{1}{J_3} (C_{31} (uH)_{n-2} + C_{32} (uH)_{n-1} + C_{33} (uH)_n)$$

gan dibagi-bagi dalam sejumlah grid-point, seperti terlihat pada **Gambar 4.2** berikut.

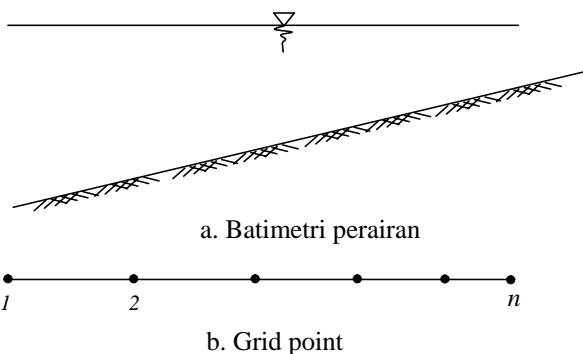
Ukuran grid tidak harus seragam, tetapi dapat berbeda-beda. Misal suatu batimetri dengan kedalaman berubah, maka sebaiknya digunakan ukuran grid yang berbeda-beda, dimana pada kedalaman yang lebih kecil digunakan ukuran grid yang lebih kecil. Bila digunakan ukuran grid yang seragam, misal mengacu pada ukuran grid pada perairan dalam, maka perhitungan pada perairan



Gambar 4.2. Pembagian domain dalam sejumlah grid-point

Perhitungan d^2f / dx^2 dilakukan dengan menggunakan **Persamaan 3.10**. Koefisien diferensial untuk $d^2f / d\xi^2$ dapat dengan mudah dibentuk yaitu dengan menggunakan persamaan

dimana sebagai koefisien turunan adalah $d^2L_i / d\xi^2$. Jadi dalam perhitungan turunan orde 2 perlu dibentuk 2 koefisien diferensial, yaitu untuk $dL_i / d\xi$ dan $d^2L_i / d\xi^2$.



Gambar 4.3. Grid-point pada perairan dengan kedalaman berubah secara konstan

Pada titik $i = 1$ yang lebih dangkal

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{J_1} (C_{11} \eta_1 + C_{12} \eta_2 + C_{13} \eta_3 + C_{14} \eta_4 + C_{15} \eta_5 + C_{16} \eta_6 + C_{17} \eta_7)$$

$$J_1 = (C_{11} x_1 + C_{12} x_2 + C_{13} x_3 + C_{14} x_4 + C_{15} x_5 + C_{16} x_6 + C_{17} x_7)$$

Pada titik $i = 2$ menjadi kurang teliti, sedangkan bila ukuran

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{J_2} \text{ grid seragam mengacu pada ukuran grid pada perairan yang lebih dangkal, maka}$$

$$(C_{21} \eta_1 + C_{22} \eta_2 + C_{23} \eta_3 + C_{24} \eta_4 + C_{25} \eta_5 + C_{26} \eta_6 + C_{27} \eta_7)$$

$$J_2 = (C_{21} x_1 + C_{22} x_2 + C_{23} x_3 + C_{24} x_4 + C_{25} x_5 + C_{26} x_6 + C_{27} x_7)$$

Pada titik $i = 3$ jumlah grid akan terlalu banyak. Untuk menentukan ukuran grid

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{J_3} \text{ dapat digunakan kriteria Courant, yaitu } \delta x \leq \frac{C}{\delta t}, \text{ dimana } C = \text{kecepatan}$$

$$(C_{31} \eta_1 + C_{32} \eta_2 + C_{33} \eta_3 + C_{34} \eta_4 + C_{35} \eta_5 + C_{36} \eta_6 + C_{37} \eta_7)$$

$$J_3 = (C_{31} x_1 + C_{32} x_2 + C_{33} x_3 + C_{34} x_4 + C_{35} x_5 + C_{36} x_6 + C_{37} x_7)$$

Pada titik $i = 4$ s/d $(n-3)$ gelombang, dimana makin

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{J_4} \text{ dangkal perairan makin kecil } C, \text{ sehingga makin kecil ukuran grid.}$$

$$(C_{41} \eta_{i-3} + C_{42} \eta_{i-2} + C_{43} \eta_{i-1} + C_{44} \eta_i + C_{45} \eta_{i+1} + C_{46} \eta_{i+2} + C_{47} \eta_{i+3})$$

$$J_4 = (C_{41} x_{i-3} + C_{42} x_{i-2} + C_{43} x_{i-1} + C_{44} x_i + C_{45} x_{i+1} + C_{46} x_{i+2} + C_{47} x_{i+3})$$

Misal untuk batimetri dengan Pada titik $i = n-2$ kemiringan konstan, maka ukuran

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{J_5} \text{ grid yang digunakan berubah juga secara konstan seperti terlihat pada Gambar 4.3. berikut.}$$

$$(C_{51} \eta_{n-6} + C_{52} \eta_{n-5} + C_{53} \eta_{n-4} + C_{54} \eta_{n-3} + C_{55} \eta_{n-2} + C_{56} \eta_{n-1} + C_{57} \eta_n)$$

$$J_5 = (C_{51} x_{n-6} + C_{52} x_{n-5} + C_{53} x_{n-4} + C_{54} x_{n-3} + C_{55} x_{n-2} + C_{56} x_{n-1} + C_{57} x_n)$$

Perhitungan differensial ruang $\partial/\partial x$ digunakan

Pada titik $i = n-1$ Persamaan 3.5a-f, yaitu :

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{J_6} \text{ samaan 3.6a-b}$$

$$(C_{61} \eta_{n-6} + C_{62} \eta_{n-5} + C_{63} \eta_{n-4} + C_{64} \eta_{n-3} + C_{65} \eta_{n-2} + C_{66} \eta_{n-1} + C_{67} \eta_n)$$

$$J_6 = (C_{61} x_{n-6} + C_{62} x_{n-5} + C_{63} x_{n-4} + C_{64} x_{n-3} + C_{65} x_{n-2} + C_{66} x_{n-1} + C_{67} x_n)$$

Pada titik $i = n$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{J_7}$$

$$(C_{71} \eta_{n-6} + C_{72} \eta_{n-5} + C_{73} \eta_{n-4} + C_{74} \eta_{n-3} + C_{75} \eta_{n-2} + C_{76} \eta_{n-1} + C_{77} \eta_n)$$

$$J_7 = (C_{71} x_{n-6} + C_{72} x_{n-5} + C_{73} x_{n-4} + C_{74} x_{n-3} + C_{75} x_{n-2} + C_{76} x_{n-1} + C_{77} x_n)$$

3.6c-d

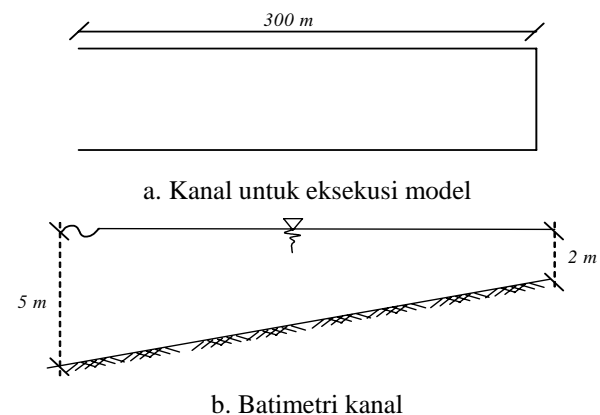
- Pada titik n dikerjakan persamaan 3.6e-f

Jadi pada contoh ini digunakan segmen domain dengan 3 titik polinomial untuk menghitung $\partial(uH)/\partial x$ dan $\partial u/\partial x$. Sedangkan untuk perhitungan $\partial \eta/\partial x$ digunakan segmen domain dengan 7 titik polinomial, yaitu sebagai berikut.

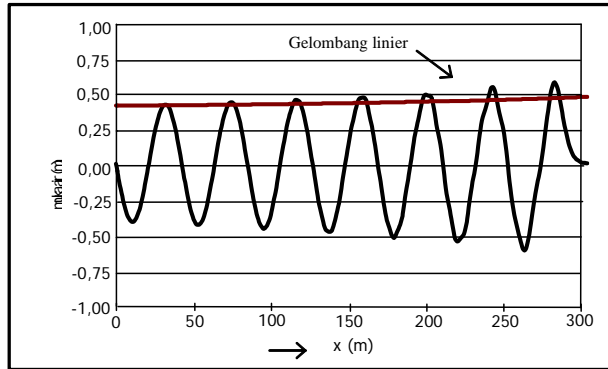
Mengingat pada titik 1 digunakan fluktuasi muka air sebagai syarat batas, maka pada titik tersebut tidak dikerjakan persamaan kontinuitas, atau tidak dilakukan perhitungan $\partial(uH)/\partial x$.

Pada titik ini persamaan momentum tidak dikerjakan, karena digunakan syarat batas benda padat, yaitu $u_n = 0$. Pada perhitungan ini harga C_{ij} digunakan harga [C] pada persamaan (3.5).

Perhitungan $\partial \eta/\partial x$, digunakan segmen domain dengan



Gambar 4.4. Kanal dengan batimetri berubah konstan



Gambar 4.5. Hasil eksekusi model pada kanal dengan kedalaman berubah

7 titik polinomial. Latar belakang perbedaan antara perhitungan $\partial(uH)/\partial x$, $\partial u/\partial x$ dan $\partial \eta/\partial x$ dapat dilihat pada [Syawaluddin, H., 2005]. Pada perhitungan $\partial \eta/\partial x$ ini digunakan harga C_{ij} pada **Persamaan (3.9)**.

Hasil simulasi adalah seperti terlihat pada **Gambar 4.5**. Terlihat pada gambar tersebut terjadi pembesaran tinggi gelombang dengan berkurangnya kedalaman, dimana hal ini menunjukkan bahwa persamaan gelombang Airy juga dapat menghasilkan fenomena shoaling pada gelombang. Perbandingan terhadap solusi analisis (teori gelombang linier), menunjukkan bahwa model memberikan hasil yang cukup dekat dengan teori gelombang linier. Pada paper ini tidak bermaksud meneliti persamaan gelombang Airy ataupun peristiwa shoaling pada persamaan gelombang Airy, mengenai berbagai keterbatasan ataupun kemampuan persamaan gelombang Airy dapat dibaca pada berbagai buku ataupun paper, antara lain [Dean, Robert G., and Dalrymple] dan [Syawaluddin, H., 2005].

5. Diskusi dan Kesimpulan

Seperti telah disebutkan bahwa metoda numeris yang dikembangkan adalah identik dengan metoda selisih

b. Penyelesaian differensial waktu

Penyelesaian differensial waktu digunakan metoda integrasi dengan koefisien integrasi diperoleh dari polinomial Lagrange juga. Metoda integrasi ini dapat dilihat pada [Syawaluddin, H., 2005].

Sebagai contoh eksekusi model, digunakan suatu kanal dengan kemiringan berubah (**Gambar 4.4**). Pada mulut kanal terdapat gelombang dengan perioda 6 detik, dengan amplitudo 0.05 m.

Pada simulasi ini digunakan grid dengan ukuran tidak seragam sebanyak 300 buah. Bila digunakan ukuran grid yang seragam akan diperlukan grid sebanyak 500 buah agar diperoleh hasil yang baik.

